ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1981

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA – Respecter strictement et mettre en évidence la numérotation des parties et des questions.

Le plan affine euclidien est rapporté à la base orthonormale directe $(O\ \vec{i}\ \vec{j})$ ou oxy.

I – L'équation à coefficient réels

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

caractérise les coniques du plan. Le faisceau des directions asymptotiques a pour équation :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 .$$

Caractériser par leur nature et leurs particularités les coniques suivantes :

a) $A = B = 0$, $C \neq 0$;
b) $A = C = 0$, $B \neq 0$;
c) $A = 0$;
d) $C = -A$.

On ne discutera pas en fonction des coefficients sur lesquels l'énoncé ne précise rien. On énoncera les résultats en les justifiant rapidement.

II – On considère l'équation différentielle à coefficients réels

(1) $$ay'^2y''y^{IV} + by'y''^2y''' + cy'^2y'''^2 + dy''^4 = 0$$

où y', y'', y''' et y^{IV} désignent les quatre premières dérivées, par rapport à x, de la fonction réelle inconnue y de la variable réelle x .

II.1 – Le changement de fonction inconnue $y' = z$ transforme l'équation (1) en l'équation (1') :

(1') $$az^2z'z''' + bzz'^2z'' + cz^2z''^2 + dz'^4 = 0$$

où $z' = y''$, $z'' = y'''$ et $z''' = y^{IV}$; l'équation (1') est vérifiée pour $z' = 0$; donner les solutions correspondantes de l'équation (1) ; on suppose, pour la suite, que $z' \neq 0$.

On fait le changement de fonction inconnue $z' = z.u$; si $u' = \dfrac{du}{dx}$ et $u'' = \dfrac{d^2u}{dx^2}$, donner l'équation du second ordre (2) vérifiée par u, x étant la variable.

II.2 – Dans l'équation (2) on pose successivement :

$$\frac{du}{dx} = u' = p, \quad \text{puis} \quad p = v \cdot u^2,$$

p et v étant les nouvelles fonctions inconnues.

Trouver l'équation différentielle du premier ordre (2') vérifiée par p, u étant la variable ; puis l'équation différentielle du premier ordre (3) vérifiée par v, u étant la variable.

II.3 – Application : $a = 3$; $b = -6$; $c = -4$; $d = 9$; les équations (1) et (3) deviennent les équations (A) et (B), à coefficients numériques ; expliciter (A) et (B).

a) L'équation (B) admet deux solutions particulières indépendantes de u : $v = v_0$ et $v = v_1$. Trouver ces solutions et les solutions correspondantes de l'équation (A). Donner les équations des courbes intégrales sous forme polynôme. Préciser la nature et les particularités de ces courbes.

b) $v \neq v_0$, $v \neq v_1$, intégrer l'équation (B) et exprimer u en fonction de v et d'une constante réelle λ. En déduire l'expression de du (différentielle de u) en fonction de λ, v et dv (différentielle de v). A l'aide de $\frac{du}{dx} = v \cdot u^2$ calculer dx en fonction de λ, v et dv. En posant $2v - 1 = t^2$, calculer x en fonction de t, λ et d'une deuxième constante réelle μ : $x = \phi(t, \lambda, \mu)$.

c) Exprimer u en fonction de t et de λ. A l'aide de $\frac{dz}{dx} = z.u$, calculer $\frac{dz}{z}$ en fonction de t et de dt (différentielle de t). En déduire z et donner y en fonction de t, λ et de deux autres constantes réelles α et β : $y = \Psi(t, \lambda, \alpha, \beta)$.

d) En utilisant la représentation paramétrique

$$x = \phi(t, \lambda, \mu) \qquad y = \Psi(t, \lambda, \alpha, \beta)$$

ou une représentation cartésienne, préciser la nature et les particularités des courbes intégrales de l'équation (A) obtenues.

e) Donner une représentation cartésienne de toutes les courbes intégrales de l'équation (A).

III – On reprend l'équation différentielle

$$(1) \qquad ay'^2 y'' y^{IV} + by' y''^2 y''' + cy'^2 y'''^2 + dy''^4 = 0 .$$

III.1 – Soient x', x'', x''' et x^{IV} les quatre premières dérivées, par rapport à y, de x considérée comme fonction de y. Exprimer y', y'', y''' et y^{IV} en fonction de x', x'', x''' et x^{IV}.

III.2 – Trouver l'équation différentielle (4) transformée de l'équation (1) quand on prend x comme fonction et y comme variable. En déduire deux relations entre les coefficients a, b, c et d de l'équation (1) pour que l'équation (4) se réduise a :

$$(4') \qquad ax'^2 x'' x^{IV} + cx'^2 x'''^2 = 0 .$$

III.3 – Application : $a = 3$, $b = -6$, $c = -4$, $d = 9$, les équations (1) et (4') deviennent les équations (A) et (C) . Expliciter et intégrer (C) . Préciser les courbes intégrales trouvées et comparer avec les courbes obtenues aux questions (II , 3) , a)) et (II , 3) , d)).

Quels avantages respectifs présentent les méthodes utilisées dans les parties II et III ?

IV– IV.1 – Trouver une équation différentielle du troisième ordre dont les courbes intégrales sont :

a) les paraboles d'axe parallèle à Ox ;

b) les hyperboles dont les asymptotes sont parallèles aux axes.

IV.2 – Trouver les trajectoires orthogonales des deux familles de coniques dont les équations sont :

a) $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $a^2 - b^2 \neq 0$.

b) $y^2 = 2\lambda x + \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Interpréter les résultats dans les deux cas.

IV.3 – Trouver une équation différentielle du quatrième ordre dont les courbes intégrales sont :

a) les coniques ayant en commun le point à l'infini sur Oy ; parmi ces coniques, celles qui ont comme asymptote Oy et sont tangentes à Ox au point d'abscisse a , vérifient une équation différentielle du premier ordre que l'on donnera ;

b) les hyperboles équilatères du plan.

IV.4 – Trouver une équation différentielle du cinquième ordre dont les courbes intégrales sont toutes les coniques du plan.

——— XOX ———

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail